



64

屆

全國奧林匹克 數學團體競賽

OLPC A

高一~高三

個人競速賽

個人獨立作答

時間：20分鐘

選擇題：每題2分，共30分

S1. 設 a, b 為實數，則下列五個式子中，必為正值的共有多少個？

$$\sqrt{(a+b+1)^2}, a^2+b^2+1, (a-b-1)^2, (ab+1)^2, a^2-4a+5$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

S2. ABC 鞋店進行促銷戰，推出「買一送一」的活動；該鞋店共有十款鞋可供選擇，其價格如下所示，且規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格。若有一位 ABC 鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有多少種？

款式	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
價格	990	990	990	1080	1080	1080	1080	1280	1280	1280

(A) 30 (B) 24 (C) 33 (D) 27 (E) 36

S3. 設 $f(x) = kx^2 - 2$ ， $g(x) = 2\sqrt{3x} - k$ ，若對所有實數 x ， $f(x) \geq g(x)$ 恆成立，則符合條件的 k 值最小為何？

(A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 5 (E) 3

S4. 設 $(a_{n+1})^3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^3$ ，其中 n 為正整數，且 a_n 皆為正數。令 $b_n = \log a_n$ ，則 $b_4 - b_{40} = ?$

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 5 (E) 6

S5. $x^{\log x} = 100$ 的所有實根之乘積為何？

(A) 1 (B) ± 1 (C) 2 (D) ± 2 (E) 4

S6. 一群體有 9 位成員，其身高(單位：cm)分別為 165、168、171、175、177、179、181、183、185。今隨機抽樣 3 人，則抽到 3 人的平均身高等於母體平均身高的機率為 $\frac{q}{p}$ ，其中 p, q 為互質的正整數，請問 $p - q = ?$

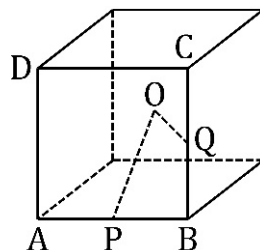
(A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27 (E) 30

S7. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AC} = 16$ ，則 $\triangle ABC$ 的內切圓面積為何？

(A) $4\sqrt{3}\pi$ (B) $2\sqrt{3}\pi$ (C) 48π (D) 24π (E) 12π

個人競速賽

個人獨立作答



S8. 如圖，ABCD 為正立方體的一個面，P、Q 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點，O 為正立方體的中心，則 $\cos \angle POQ = ?$

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

S9. $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為平面上兩向量，且 $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，若 $t \in \mathbb{R}$ ，則 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 的最小值為何？

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (C) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ (D) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ (E) $\frac{3\sqrt{10}}{4}$

S10. 若由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成之平行四邊形的面積為 2，則由 $4\vec{a} - 3\vec{b}$ 與 $4\vec{b}$ 所張成之平行四邊形的面積為何？

- (A) 16 (B) 12 (C) 6 (D) 32 (E) 24

S11. 設一元二次整係數方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一根為 $6 + 8i$ ，若將此方程式的兩根與原點在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形之面積為何？

- (A) 48 (B) 10 (C) 64 (D) 16 (E) 96

S12. 計算 $48\cos 48^\circ \cos 96^\circ \cos 192^\circ \cos 384^\circ = ?$

- (A) 3 (B) -3 (C) 4 (D) -6 (E) 6

S13. 一等差數列的項數為偶數，已知其奇數項與偶數項的和分別為 45 與 54，且最後一項比首項大 16.5，則此等差數列的項數為何？

- (A) 10 (B) 18 (C) 12 (D) 24 (E) 16

S14. 已知圓 $C: x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ ，直線 $L: 2x + y = 13$ ，則圓 C 上與直線 L 最遠的點為何？

- (A) $(2, -3)$ (B) $(-2, -3)$ (C) $(1, 0)$ (D) $(-1, 0)$ (E) $(-1, -4)$

S15. 設 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，若 $N = [\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \cdots + [\log_2 512]$ ，則 N 的各位數字之和為何？

- (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24



64

屆

全國奧林匹克 數學團體競賽

OLPC A

高一~高三

個人思考賽

個人獨立作答

時間：40分鐘

簡答題：每題4分，共24分

- I1. 設 $x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}$, 則 $(x^2 - y^2)^2 + 8xy = ?$
- I2. 已知正數 $a_1, a_2, \dots, a_9$ 構成等比數列，若前 7 項的和為 $15\sqrt{2} + 14$ ，後 7 項的和為 $30\sqrt{2} + 28$ ，則 $a_8 = ?$
- I3. 若三個邊長皆為整數的正方體的表面積之和為 558，則這三個正方體的體積之和為何？
- I4. 若 $f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x}f(x) + 4$ ，則 $1 - 2f(5) = ?$
- I5. 已知 $a, b \in \mathbb{N}$ ，集合 $A = \{x \mid 6x - a \leq 0\}$ ， $B = \{x \mid 7x - b > 0\}$ ，若 $A \cap B \cap \mathbb{N} = \{3, 4, 5, 6\}$ ，則符合條件的數對 (a, b) 有多少對？
- I6. 使得 $\frac{(n-3)(n+2)^2}{2n-1}$ 為整數的最大整數 n 為何？

簡答題：每題8分，共16分

- I7. 函數 $f(a, b) = (a-b)^2 + (\sqrt{8-a^2} - \frac{25}{b})^2$ 的最小值為何？
- I8. 已知點 O 為坐標原點，點 $P(x, y)$ 在曲線 $C: (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + x\sin\theta - y\cos\theta = 1$ 上，則 $2\overline{OP}$ 的最小值為 $\sqrt{a}$ ，請問 $a = ?$



64

全國奧林匹克
數學團體競賽

OLPC A

高一~高三

◀ 團隊接力賽 - 第一輪 ▶

全隊共同作答

時間：6分鐘

簡答題：R1B. 答對5分，共5分

R1A. 自然數按如下的規律排列，請問左起第 2023 行，上起第 2022 列的數的末兩位數字之和為何？

1 2 5 10 17
4 3 6 11 18
9 8 7 12 19 ...
16 15 14 13 20
25 24 23 22 21
⋮

R1B. T = 你從 R1A 得到的結果。

已知 I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{AB} = T + 2$ ， $\overline{BC} = T$ ， $\overline{AC} = T - 2$ ，若 $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，請問 $8x + 5y$ 的值為何？



64

全國奧林匹克
數學團體競賽

OLPC A

高一~高三

－ 團隊接力賽 - 第二輪 -

全隊共同作答

時間：8分鐘

簡答題：R2B. 答對5分，R2C. 答對10分，共15分

R2A. 已知 a 、 b 、 c 是非零實數，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ， $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}) + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = -3$ ，
請問 $2(a+b+c)$ 可能的值中最大為何？

R2B. S = 你從 R2A 得到的結果。
已知 $0 < a < 1$ ，請問關於 x 的方程 $||x - S| - 1| - a = 0$ 的所有解之和為何？

R2C. T = 你從 R2B 得到的結果。
在直角坐標平面上，一隻青蛙從原點 $(0, 0)$ 出發，每次只能向右跳 1 單位或向上跳 1 單位。若青蛙總共跳了 T 次，且在跳躍過程中沒有經過點 $(2, 2)$ ，請問青蛙共有多少種不同的跳躍路徑？



64

屆

全國奧林匹克 數學團體競賽

OLPC A

高一~高三

－ 團隊接力賽 - 第三輪 -

全隊共同作答

時間：10分鐘

簡答題：R3B. 答對5分，R3D. 答對5分，R3E. 答對10分，共20分

R3A. 已知一直角三角形的內切圓半徑為 2，且其三邊長皆為正整數，請問滿足條件的所有可能直角三角形中，最大的周長為何？

R3B. S = 你從 R3A 得到的結果。
設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如： $[2.5] = 2$ ， $[4] = 4$ ，請問 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{S}] = ?$

R3C. 已知 $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$ ，請問 $2\sin\alpha + 2\sin\beta$ 的最大值與最小值之差為何？

R3D. T = 你從 R3C 得到的結果。
已知 p, q 為正整數，若二次方程式 $x^2 - px - q = 0$ 的正根小於 T ，請問這樣的二次方程式有多少個？

R3E. P = 你從 R3B 得到的結果， Q = 你從 R3D 得到的結果。
設 $A(x)$ 為一個實係數多項式，且 $A(x)$ 除以 $x - P$ 的餘式為 Q ， $A(x)$ 除以 $x - Q$ 的餘式為 P 。
若 $A(x)$ 除以 $(x - P)(x - Q)$ 的餘式為 $B(x)$ ，請問方程 $B(x) = 0$ 的實根為何？



64

屆

全國奧林匹克 數學團體競賽

OLPC A

高一~高三

團隊合作賽

全隊共同作答

時間：25分鐘

簡答題：每題6分，共90分

- T1.** 計算 $\frac{\sin 6^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 9^\circ}{\cos 6^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 9^\circ} + 2\cos 30^\circ = ?$
- T2.** 設 $m > 0$ ，若方程 $x^2 - 8x + m = 0$ 的兩個實根皆為整數，請問所有滿足此條件的可能 m 值之和為何？
- T3.** 已知兩相異實數 x, y 滿足 $x^2 = x + 1, y^2 = y + 1$ ，請問 $x^7 + y^7 = ?$
- T4.** 設 x 為整數， $2x + 9$ 為質數，且 $x + 9, 16x + 9$ 皆為完全平方數，請問符合條件的所有 x 之和為何？
- T5.** 設 x, y 為實數，且滿足 $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2023x = 2020 \\ y^3 - 3y^2 + 2023y = 2022 \end{cases}$ ，請問 $x + y = ?$
- T6.** $N = 7^{13} + C_1^{13} \cdot 7^{12} + C_2^{13} \cdot 7^{11} + \dots + C_{12}^{13} \cdot 7 - 1$ ，請問 N 被 9 除所得餘數為何？
- T7.** 集合 $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ 的某些子集滿足條件：沒有一個數是另一個數的 2 倍，請問這樣的子集中所含元素最多有多少個？
- T8.** 四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = 2, \overline{BD} = \sqrt{12}, \overline{CD} = \sqrt{8}$ ，請問 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 所成的角為多少度？
- T9.** 若 $x^2 + y^2 = 289$ ，則 $\sqrt{30y - 16x + 340} + \sqrt{30y + 16x + 340}$ 的最大值為 $\sqrt{N}$ ，請問 N 的值為何？
- T10.** 設 x, y, z 為整數，其中 $1 \leq x < y < z \leq 9$ ，若 $\overline{xyz} \cdot \overline{yzx} \cdot \overline{zxy} + 1$ 為 9 的倍數，則 $x + y + z$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，請問 $M + 2m$ 的值為何？

團隊合作賽

全隊共同作答

- T11.** 已知 $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$ ，且 $f(1)=3$ ，請問 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)}{f(5)} + \cdots + \frac{f(1330)}{f(1329)} = ?$
- T12.** 將長度為 3400 的鐵絲截成三段，則這三段恰能圍成三角形的機率為 $\frac{q}{p}$ ，其中 $p、q$ 為互質的正整數，請問 $p+3q = ?$
- T13.** 設數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 滿足 $a_1=a_2=1, a_3=2$ ，且對任意正整數 n ，都有 $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \neq 1, a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ ，請問 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{111} = ?$
- T14.** 已知 $a、b、c、d$ 皆為正數，且 $a+3b=1, c+3d=1$ ，請問 $\frac{1}{a} + \frac{1}{bcd}$ 的最小值為何？
- T15.** 滿足不等式 $-2 < \sqrt{x^2 - 10x + 28} - \sqrt{x^2 - 18x + 84} < 2$ 的所有整數解之和為何？

是題



64

全國奧林匹克 數學團體競賽

OLPC A

高一~高三-解答

個人競速賽

S1	S2	S3	S4	S5
B	C	E	E	A
S6	S7	S8	S9	S10
D	E	B	D	D
S11	S12	S13	S14	S15
A	A	C	B	C

團隊接力賽

R1B	R3B
4	100
R2B	R3D
8	21
R2C	R3E
160	121

個人思考賽

I1	4
I2	16
I3	645
I4	12
I5	42
I6	63
I7	18
I8	3

團隊合作賽

T1	2
T2	50
T3	29
T4	287
T5	2
T6	6
T7	133
T8	60
T9	3400
T10	39
T11	1995
T12	7
T13	220
T14	49
T15	21